

Минобрнауки России

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

Кургалин Сергей Дмитриевич

Кафедра цифровых технологий

25.06.2021



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.О.20 Функциональный анализ

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

02.03.01 Математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки/специализация:**

Квантовая теория информации, Распределенные системы и искусственный интеллект

**3. Квалификация (степень) выпускника:**

Бакалавриат

**4. Форма обучения:**

Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

Кафедра цифровых технологий

**6. Составители программы:**

Семенов Михаил Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор

**7. Рекомендована:**

протокол НМС ФКН № 5 от 10.03.2021

**8. Учебный год:**

2023-2024

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:**

изучение основных методов и инструментов функционального анализа и их применение к решению прикладных задач.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:**

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курсов «Математический анализ». Функциональный анализ относится к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ Функционального анализа является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников) и индикаторами их достижения:**

Код и название компетенции	Код и название индикатора компетенции	Знания, умения, навыки
<p>ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук</p>	<p>Знает основы теории линейных функционалов и линейных операторов, принципы существования неподвижных точек у различных классов операторов</p>
<p>ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>Умеет применять методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных предметных областях</p>
<p>ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p>Владеет приемами и методами решения интегральных и операторных уравнений</p>

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час:

4/144

## Форма промежуточной аттестации:

Экзамен

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Семестр 6	Всего
Аудиторные занятия	64	64
Лекционные занятия	32	32
Практические занятия	32	32
Лабораторные занятия		0
Самостоятельная работа	44	44
Курсовая работа		0
Промежуточная аттестация	36	36
Часы на контроль	36	36
Всего	144	144

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1	Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса	Мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Теоремы Фату, Лебега, Леви. Интеграл Лебега-Стилтьеса.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>
2	Метрические и Банаховы пространства	Открытые, замкнутые множества. Линейные пространства. Метрические пространства. Метрика. Полнота. Полнота стандартных пространств. Теорема о пополнении. Банаховы и гильбертовы пространства.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
3	Линейные и компактные операторы	Спектр, резольвента, спектральный радиус линейного оператора. Обратимость линейного оператора. Теорема Банаха-Штейнгауса. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Арцела. Компактные операторы.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>
4	Теоремы о неподвижных точках	Принцип сжимающих отображений. Теорема Шаудера. Монотонные операторы. Теорема Биркгофа-Тарского.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>
5	Интегральные преобразования, интегральные уравнения	Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений. Альтернатива Фредгольма.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>
6	Некорректные задачи математической физики	Некорректные задачи. Методы регуляризации. Теорема Тихонова.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>
7	Приближенные методы решения операторных уравнений	Методы осреднения. Метод Рисса. Метод малого параметра.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11789</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела)	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа	Всего
1	Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса	4	4		4	12
2	Метрические и Банаховы пространства	4	4		8	16
3	Линейные и компактные операторы	4	4		6	14
4	Теоремы о неподвижных точках	4	4		8	16
5	Интегральные преобразования, интегральные уравнения	6	6		6	18
6	Некорректные задачи математической физики	6	6		6	18
7	Приближенные методы решения операторных уравнений	4	4		6	14
		32	32	0	44	108

#### **14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических (или лабораторных) заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины. Лекционные занятия формируют базу для практических (или лабораторных) занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических (лабораторных) занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, презентационным материалом (при наличии) и конспектов практических (лабораторных) занятий. В качестве плана для

самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Большее количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

### **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

№ п/п	Источник
1	<b>Колмогоров, А.Н.</b> Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин .— 7-е изд. — Москва : Физматлит, 2012 .— 573 с. — (Классический университетский учебник) .— ISBN 978-5-9221-0266-7 .— <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563</a> >.
2	<b>Осиленкер, Б.П.</b> Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебно-практическое пособие / Б.П. Осиленкер - М. : Издательство МИСИ - МГСУ, 2017. — Москва : Издательство МИСИ - МГСУ, 2017 .— 133 с. — Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебно-практическое пособие / Б.П. Осиленкер - М. : Издательство МИСИ - МГСУ, 2017. — ISBN 5-7264-1650-2 .— <URL: <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785726416502.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785726416502.html</a> >.

#### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	<b>Лебедев, В.И.</b> Функциональный анализ и вычислительная математика [Электронный ресурс]: Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Москва : Физматлит, 2005 .— 296 с. — Функциональный анализ и вычислительная математика [Электронный ресурс]: Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — ISBN 21-0092-0 .— <URL: <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html</a> >.
2	<b>Люстерник, Л. А.</b> Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] / Люстерник Л. А., Соболев В. И. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009 .— 272 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-0976-1 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=245">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=245</a> >.

№ п/п	Источник
3	<b>Иосида, К.</b> Функциональный анализ / К. Иосида ; пер. с англ. В. М. Волосов .— Москва : Мир, 1967 .— 623 с. — <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a> .— <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=459742">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=459742</a> >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1	ЗНБ ВГУ: <a href="https://lib.vsu.ru/">https://lib.vsu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a>
3	Электронно-библиотечная система "Лань": <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": <a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>
5	Электронный университет ВГУ: <a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<b>Колмогоров, А.Н.</b> Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин .— 7-е изд. — Москва : Физматлит, 2012 .— 573 с. — (Классический университетский учебник) .— ISBN 978-5-9221-0266-7 .— <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563</a> >.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала [edu.vsu.ru](http://edu.vsu.ru), а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 477

Учебная аудитория: специализированная мебель, ноутбук HP Pavilion Dv9000-er, мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 479

Учебная аудитория: специализированная мебель, компьютер преподавателя i5-8400-2,8ГГц,

монитор с ЖК 19», мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 505п

Учебная аудитория: специализированная мебель, компьютер преподавателя i5-3220-3.3ГГц, монитор с ЖК 17'', мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 292

Учебная аудитория: специализированная мебель, компьютер преподавателя Pentium-G3420-3,2ГГц, монитор с ЖК 17'', мультимедийный проектор, экран. Система для видеоконференций Logitech ConferenceCam

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 297

Учебная аудитория: специализированная мебель, компьютер преподавателя i3-3240-3,4ГГц, монитор с ЖК 17'', мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 380

Учебная аудитория: специализированная мебель, компьютер преподавателя i3-3240-3,4ГГц, монитор с ЖК 17'', мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 305п

Учебная аудитория: специализированная мебель, ноутбук HP Pavilion Dv9000-er, мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, ауд. 307п

Учебная аудитория: специализированная мебель, ноутбук HP Pavilion Dv9000-er, мультимедийный проектор, экран

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, Набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием



следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Разделы дисциплины (модули)	Код компетенции	Код индикатора	Оценочные средства для текущей аттестации
1	Разделы 1-7	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа
2	Разделы 1-7	ОПК-1	ОПК-1.2	Контрольная работа
3	Разделы 1-7	ОПК-1	ОПК-1.3	Контрольная работа

Промежуточная аттестация

Форма контроля - Экзамен

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Перечень вопросов к экзамену

## **20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- контрольные работы

#### **Контрольная работа № 1**

**Задание 1 (15 баллов).** Доказать, что произвольное открытое подмножество прямой можно представить в виде объединения не более чем счётного числа попарно не пересекающихся интервалов (возможно бесконечных).

**Задание 2 (15 баллов).** Доказать, что  $C[a, b]$  плотно в  $L1[a, b]$ .

**Задание 3 (20 баллов).** Пусть функция  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лебегу. Пусть задана последовательность измеримых подмножеств  $\{A_n\}$  отрезка  $[0,1]$ ,  $\mu A_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , такая, что  $f$  интегрируема по Лебегу на каждом  $A_n$ . Пусть существует  $M > 0$  такое, что

$$\int_{A_n} |f(t)| dt \leq M$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $f$  интегрируема по Лебегу на  $[0,1]$ , причём существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

#### **Контрольная работа № 2**

**Задание 1 (15 баллов).** Привести пример непрерывного отображения замкнутого единичного шара пространства  $l_2$  в себя, не имеющего неподвижной точки.

**Задание 2 (15 баллов).** Показать, что отображение  $f(x) = 5x^2 + 2x + 3 - \sin x$  числовой прямой в себя не имеет неподвижных точек.

**Задание 3 (20 баллов).** Вычислить интеграл Лебега  $\int_0^1 f(x) dx$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для всех иррациональных } x, \text{ больших чем } 1/3, \\ x^3 & \text{для всех иррациональных } x, \text{ меньших чем } 1/3, \\ 0 & \text{в рациональных точках.} \end{cases}$$

### **Контрольная работа № 3**

**Задание 1 (20 баллов).** Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

методом регуляризации, найдя предварительно нормальное решение.

**Задание 2 (30 баллов).** Методом малого параметра найти три слагаемых разложения решения задачи

$$y' - \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = -\varepsilon.$$

#### **20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- собеседование по экзаменационным билетам

#### **Перечень вопросов к экзамену**

1. Мера Лебега.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Измеримые по Лебегу множества.
4. Теорема Шаудера.
5. Измеримые функции.
6. Монотонные операторы.
7. Интеграл Лебега.
8. Теорема Биркгофа-Тарского.
9. Теоремы Фату, Лебега, Леви.
10. Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений.
11. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
12. Альтернатива Фредгольма.
13. Открытые, замкнутые множества.
14. Некорректные задачи. Методы регуляризации.
15. Линейные пространства. Метрические пространства.
16. Теорема Тихонова.
17. Метрика. Полнота. Полнота стандартных пространств.
18. Методы осреднения.
19. Теорема о пополнении. Банаховы и гильбертовы пространства.
20. Метод Рисса.
21. Спектр, резольвента, спектральный радиус линейного оператора.
22. Метод малого параметра.
23. Обратимость линейного оператора.
24. Принцип сжимающих отображений.
25. Теорема Банаха-Штейнгауса.

26. Линейные пространства. Метрические пространства.
27. Теорема Банаха об обратном операторе.
28. Измеримые по Лебегу множества. Измеримые функции.
29. Теорема Арцела. Компактные операторы.
30. Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырём из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	-	Неудовлетворительно